

XXIII Krajowa Konferencja SNM

Geometria



Małgorzata Lesisz

Przewodnicząca Żoliborskiego Oddziału SNM
Doradca metodyczny m. st. Warszawa

„Tworzenie siatek brył bez kleju w programie GeoGebra”

Artykuł pani Małgosi Lesisz został nadesłany w tak doskonałej formie, że uznaliśmy, za celowe pozostawienie go tak jak został nam zaprezentowany, mimo, że forma prezentacji różni się trochę od przyjętego przez nas szablonu.

„Tworzenie siatek brył bez kleju w programie GeoGebra”

Bryłki bez kleju znam od dawna i jestem nimi oczarowana. Moi uczniowie i koleżanki też je znają. Nie jeden raz pytałam Wacka Zawadowskiego kto tworzy takie siatki i wówczas słyszałam odpowiedź: „Ty sama możesz je tworzyć – masz do tego narzędzie - program GeoGebra.” Bardzo długo nie wierzyłam we własne siły. Moją przygodę z tworzeniem siatek brył bez kleju rozpoczęłam we wrześniu 2013, kiedy razem z uczniami Zespołu Szkół Nr 106 w Warszawie przygotowaliśmy się do udziału w Festiwalu Nauki Małego Człowieka na Wydziale Fizyki Politechniki Warszawskiej. Pierwszą wspólnie z uczniami wykonaną pracą była siatka ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego, którego ściany boczne są trójkątami złotymi.



To zadanie nie było trudne, choć dla początkujących w tej dziedzinie stanowiło pewne wyzwanie.

Wstawiliśmy suwak  o nazwie **a** , zmieniliśmy minimum na 0.1, gdyż długość boku wielokąta musi być liczbą dodatnią. Narysowaliśmy odcinek o długości **a** , a następnie wielokąt foremny  o boku **a** i liczbie wierzchołków 5. Narysowaliśmy proste  zawierające boki pięciokąta, zaznaczyliśmy punkty przecięcia  tych prostych i narysowaliśmy pięć trójkątów , których podstawami były boki pięciokąta a wierzchołkami punkty przecięcia prostych. Łatwo policzyć, że miary kątów wewnętrznych tych trójkątów wynoszą: 36° , 72° , 72° . Powstała siatka ostrosłupa. Mogliśmy zmieniać jej wielkość zmieniając wartość suwaka. Jednak naszym celem było utworzenie siatki, z której można złożyć bryłę nie używając kleju. Należało więc zwiększyć liczbę ścian tak, aby

niektóre z nich stanowiły tak zwane zakładki. Narysowaliśmy okrąg  o środku w wierzchołku kąta 36° przechodzący przez dwa kolejne wierzchołki pięciokąta, następnie za pomocą narzędzia

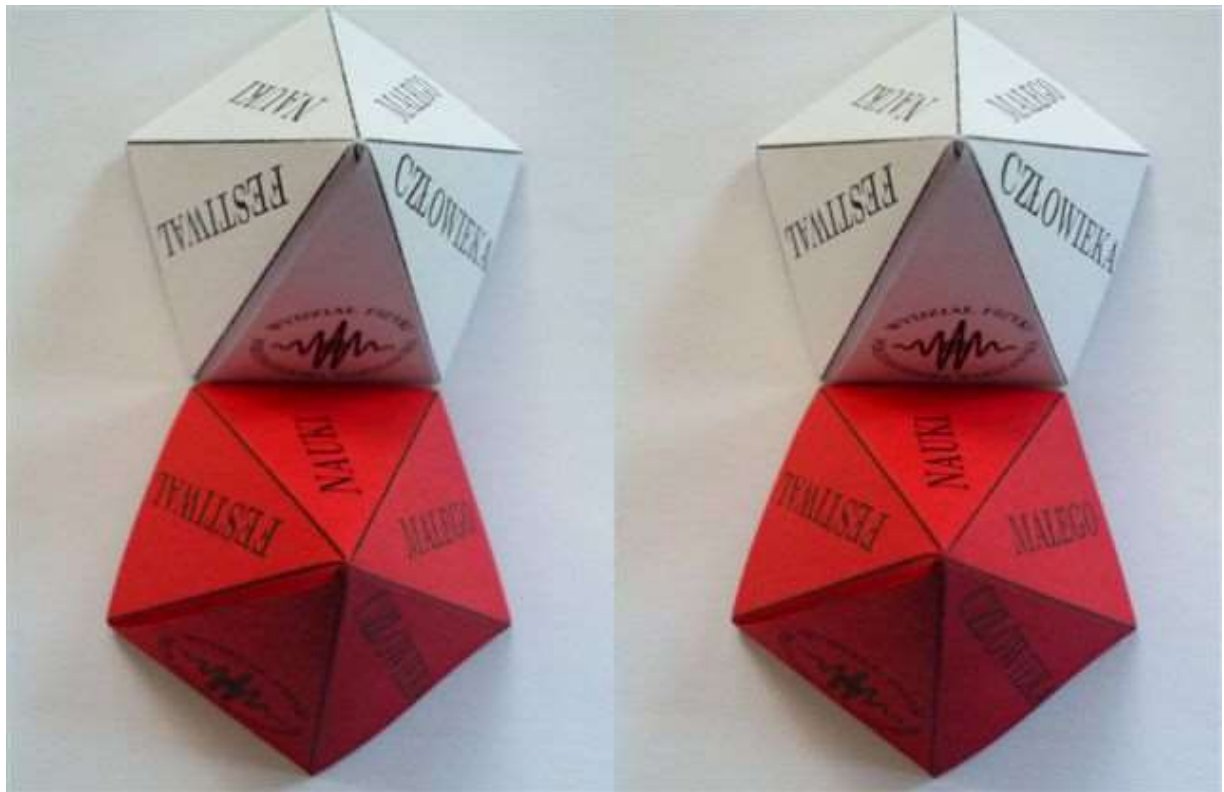
Dwusieczna kąta  podzieliliśmy koło na 10 równych części, zaznaczyliśmy punkty wspólne okręgu i dwusiecznych oraz narysowaliśmy trójkąty będące dodatkowymi ścianami bocznymi ostrosłupa. Wyglądało to tak jakbyśmy dwie różne siatki tego samego ostrosłupa skonstruowali na jednym rysunku i jeszcze dołożyli dwie dodatkowe ściany. Teraz pozostało wskazać, które ściany po złożeniu są na zewnątrz, a które w środku - zewnętrzne przyozdobiliśmy odpowiednio do naszych

potrzeb. Wstawiliśmy jako obraz  logo Żoliborskiego Oddziału Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki, które swego czasu powstało w pracowni mistrza Zawady. We Właściwościach tego obrazu w zakładce Położenie wybraliśmy jako dolny prawy i dolny lewy róg odpowiednio środki boków pięciokąta – logo zostało umieszczone w podstawie ostrosłupa. Kolejny obraz to logo Wydziału Fizyki PW, które umieściliśmy na jednej ze ścian bocznych. Utworzyliśmy cztery napisy

, w Polu wprowadzania wpisaliśmy kolejno: ObróćTekst[tekst1,90°], ObróćTekst[tekst2,126°], ObróćTekst[tekst3,162°], ObróćTekst[tekst4,198°] i obrócone sformatowane teksty umieściliśmy na kolejnych zewnętrznych ścianach bocznych. Ukryliśmy linie pomocnicze, zaznaczyliśmy rysunek i za pomocą ścieżki: Plik → Eksportuj → Widok Grafiki jako obraz (png, eps) zapisaliśmy naszą pracę. Pozostało umieścić rysunek lub rysunki w pliku tekstowym tak, aby jak najbardziej wykorzystać stronę karki do druku.

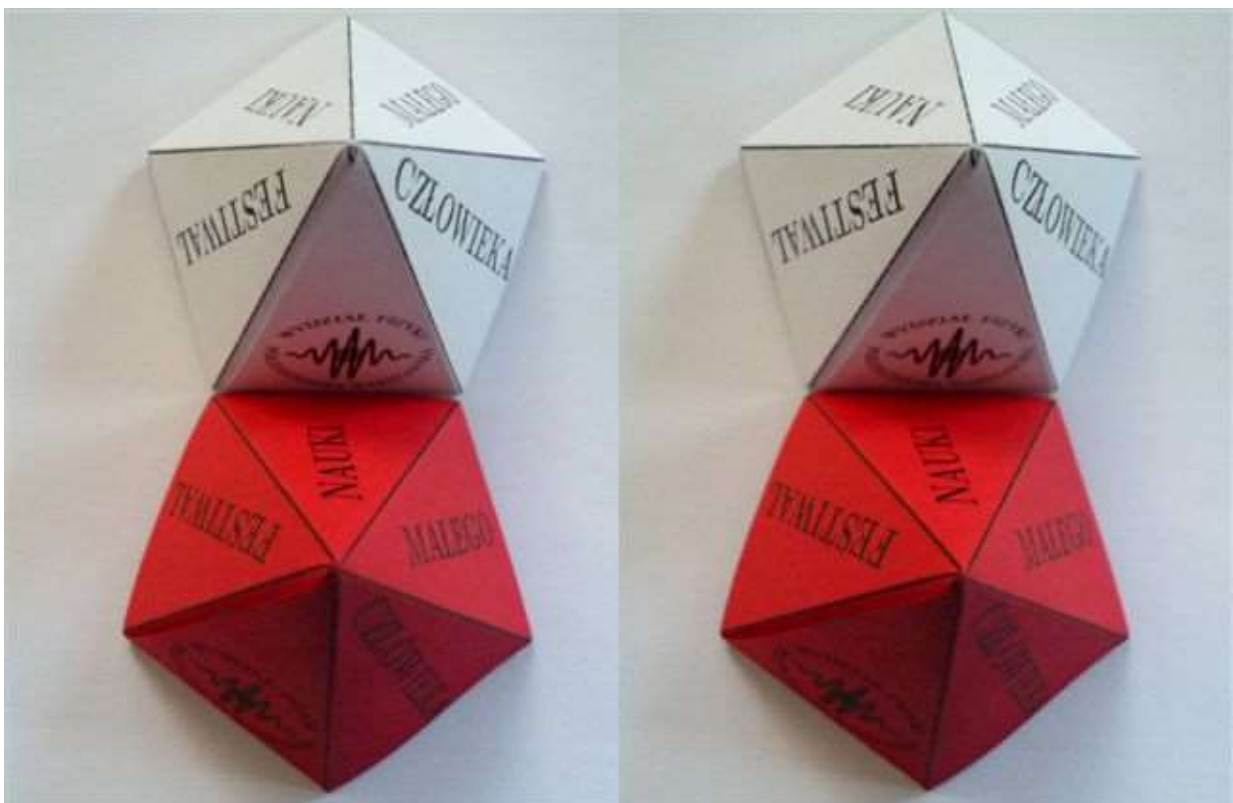


Zdjęcia stereo naszego ostrosłupa można oglądać z zezem:



II

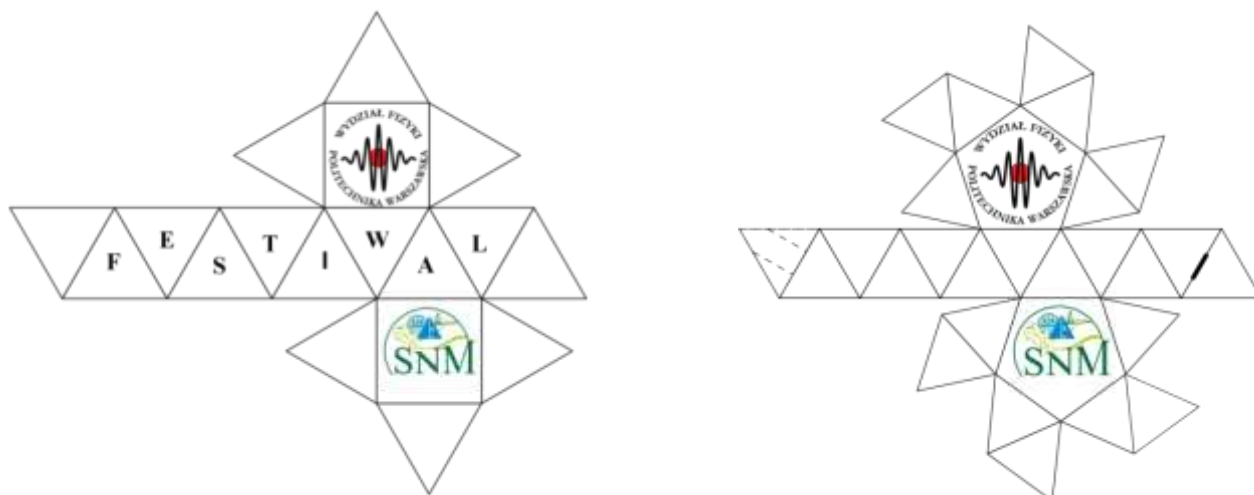
zbieżnym, oznakowane przez II



X

lub rozbieżnym oznakowane przez X.

Uczniowie wykonali też w programie GeoGebra siatki dwóch antygraniastosłupów czworokątnego i pięciokątnego. Dopiero wykonując tę pracę dowiedzieli się o istnieniu graniastosłupów skręconych.



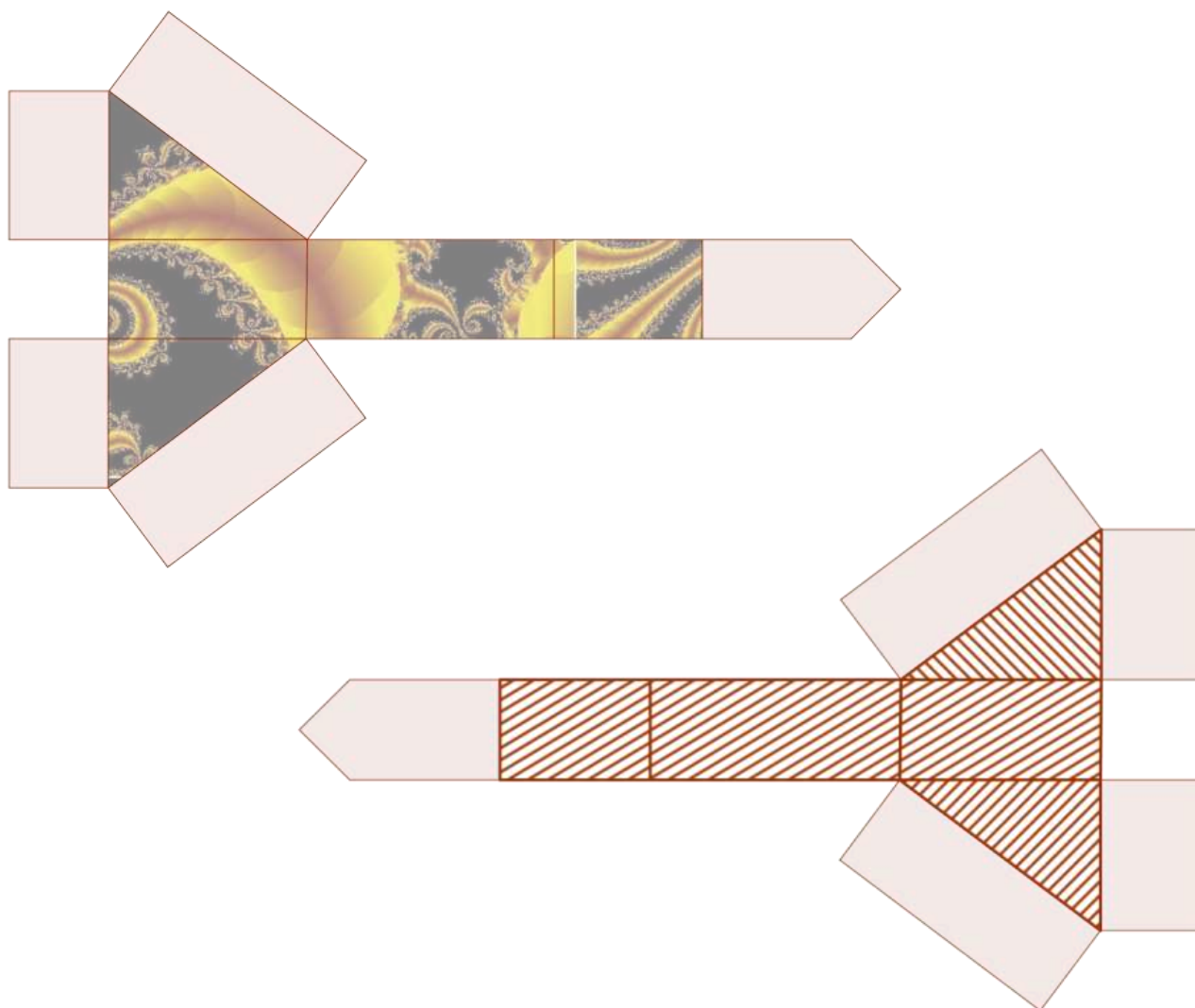
Do utworzenia tych siatek użyliśmy jednego narzędzia Wielokąt foremny .

Siatki drukowaliśmy na kolorowych kartkach A4, były one wykorzystane podczas Festiwalu Nauki. Mali uczestnicy imprezy na Wydziale Fizyki Politechniki Warszawskiej wycinali i składali z siatek bryłki, a potem zabierali je do domu.



Zdjęcie stereo naszych bryłek do oglądania z zezem zbieżnym II

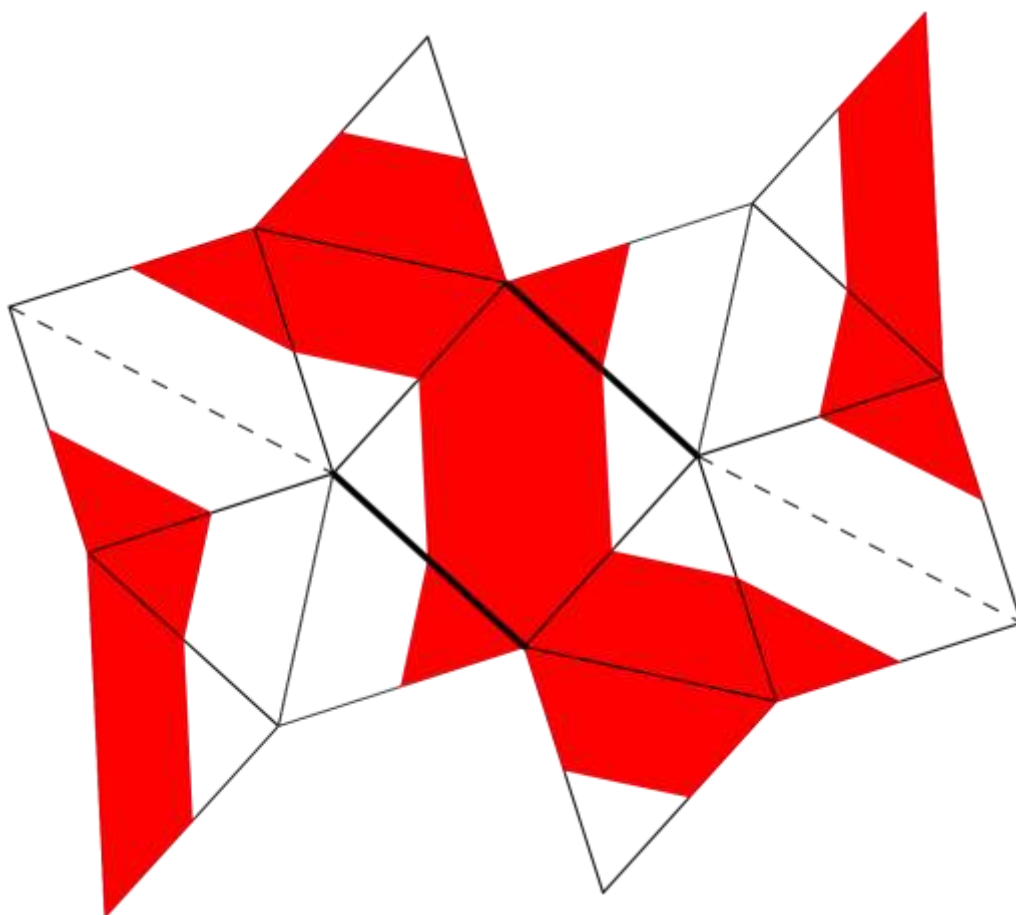
Następna siatka została nazwana RAKIETA - to siatka graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt egipski (3, 4, 5). Program GeoGebra pozwala na różne sposoby „dekorowania” siatek.



Te i poprzednie siatki były wymyślane i projektowane na zajęciach przygotowujących do czynnego uczestniczenia uczniów Zespołu Szkół Nr 106 na stanowisku Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki podczas Festiwalu Nauki Małego Człowieka, który odbył się w dniach 28 i 29 września 2013 r.



Piękną środkowo symetryczną siatkę siedmiościanu jednostronnego zrobiłam w programie GeoGebra wzorując się na tej, którą Wacek pokazywał na warsztatach kursu „Ocenianie przez zdobywanie sprawności czyli nauczanie czynnościowe” organizowanego przez WCIES & SNM. Oczywiście zauroczyły mnie też jej nasze narodowe barwy.

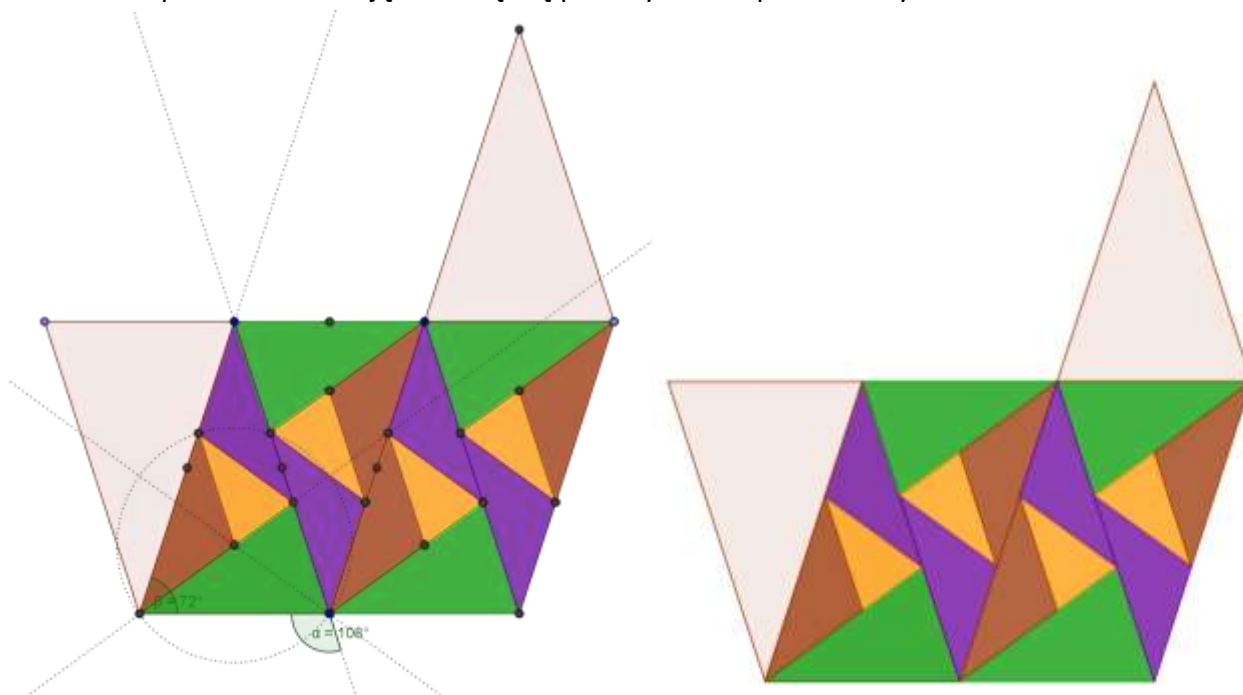


Do jej utworzenia użyłam następujących narzędzi programu GeoGebra: Suwak  $a = 2$, Odcinek o stałej długości , Wielokąt foremny , Proste prostopadłe , Okrąg o danym środku przechodzący przez punkt , Przecięcie dwóch obiektów , Wielokąt , Środek , Odcinek między dwoma punktami .

Po wycięciu siatki przecinamy wzdłuż dwóch ciemniejszych odcinków, następnie zaginamy na zewnątrz wzdłuż boków wielokątów oraz zaginamy do wewnątrz wzdłuż dwóch linii przerywanych. Teraz sprytnie składamy tak, aby środkowy kwadrat po stronie niepomalowanej został pokryty połówkami kwadratów z przerywanymi przekątnymi, przy czym drugie połówki tych samych kwadratów „przytulają się” do siebie niepomalowanymi stronami. Sterczące trójkąty równoboczne „przytulają się” niepomalowanymi stronami do tych trójkątów, z którymi mają jeden bok wspólny. A co zrobić z trójkątami prostokątnymi równoramiennymi? Też je „przytulić” niepomalowanymi stronami. Policzmy teraz wszystkie ściany: cztery trójkąty równoboczne z ośmiościanu foremnego, jeden kwadrat będący przekrojem ośmiościanu i dwie połówki kwadratów nie leżące w tej samej płaszczyźnie. Razem siedem.

Przyznam, że środkowo-symetryczność tej siatki odkryłam dopiero przy jej tworzeniu. Wcześniej skupiałam się na tym jak złożyć bryłę, ile ta bryła ma ścian i dlaczego jest jednostronna.

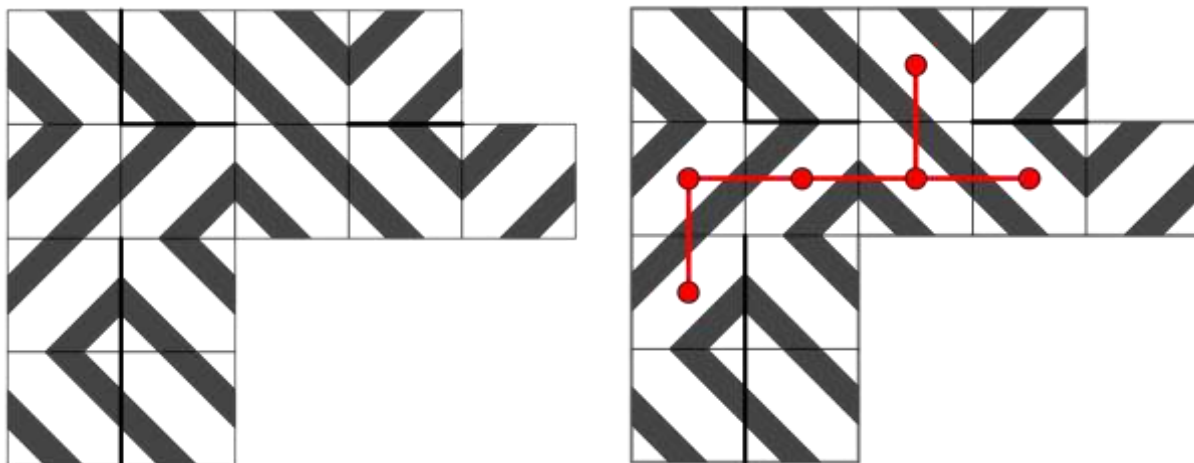
Siatka czworościanu złożonego z trójkątów złotych, którego ściany są przyozdobione trójkątami złotymi dwóch rodzajów powstała nieco później i była wzorowana na tej, którą widziałam w kolekcji mathsiedlce.edu.pl. Skonstruowałam trójkąt złoty, podzieliłam go na mniejsze trójkąty, a następnie odbiłam symetrycznie względem środka ramienia pierwszego trójkąta i środka ramienia odbitego trójkąta. Siatki, które tworzę w programie GeoGebra można powiększać lub zmniejszać za pomocą suwaka. Tu pokazałam wersję roboczą i tę po ukryciu linii pomocniczych.



Do utworzenia siatki sześcianu wraz ze wzorem wykorzystałam Widok Arkusza programu GeoGebra, w którym wygenerowałam punkty będące wierzchołkami kwadratów i te, które dzielą boki na trzy równe części. Po wycięciu siatki trzeba przeciąć wzdłuż pogrubionych linii.

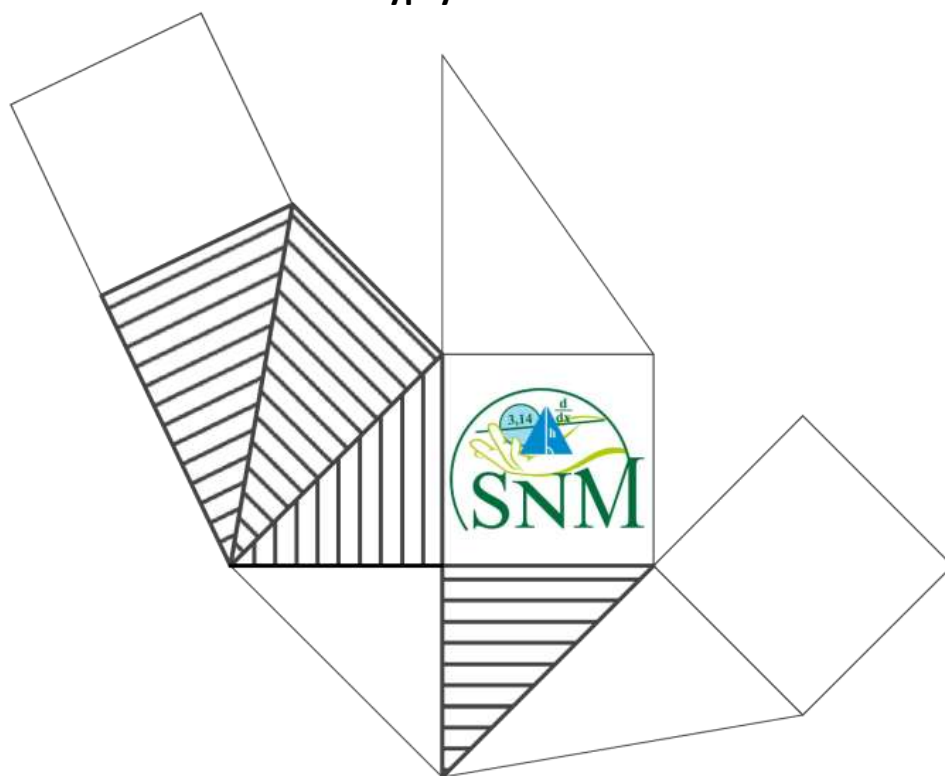
Niektóre kwadraty stanowią ściany sześcianu, inne pełnią rolę zakładek i są po to, aby po złożeniu model sześcianu był sztywny.

Kwadraty właściwej siatki mają strukturę grafu, który jest drzewem. Taki graf jest spójny i nie ma pętli. Widać to wyraźnie na drugim rysunku.

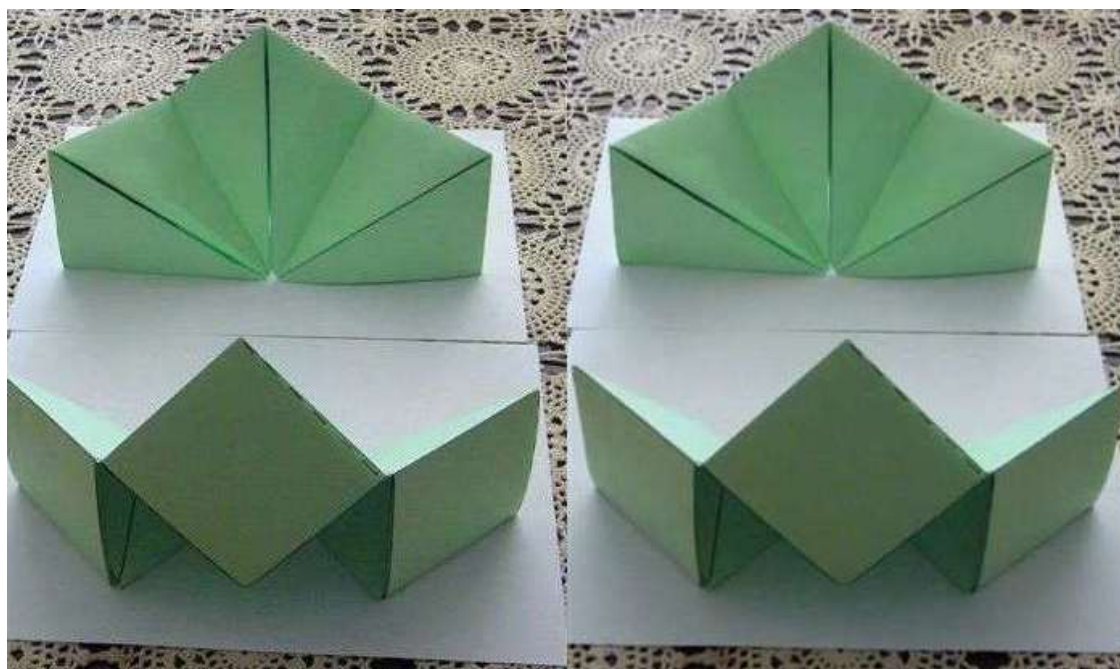


A oto jeszcze siatki dwóch różnych rozkładów sześciianu wykonane w programie GeoGebra.

Tryptyk Cavalieri



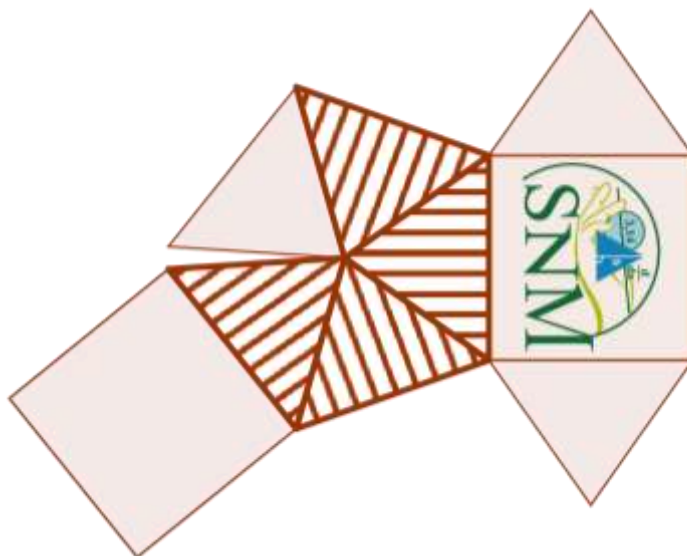
Trzy takie ostrosłupy wypełniają sześciian. Więcej informacji można znaleźć na stronie <http://mathsiedlce.edu.pl/matematyka/geometria/5-tryptyk-cavalieri>



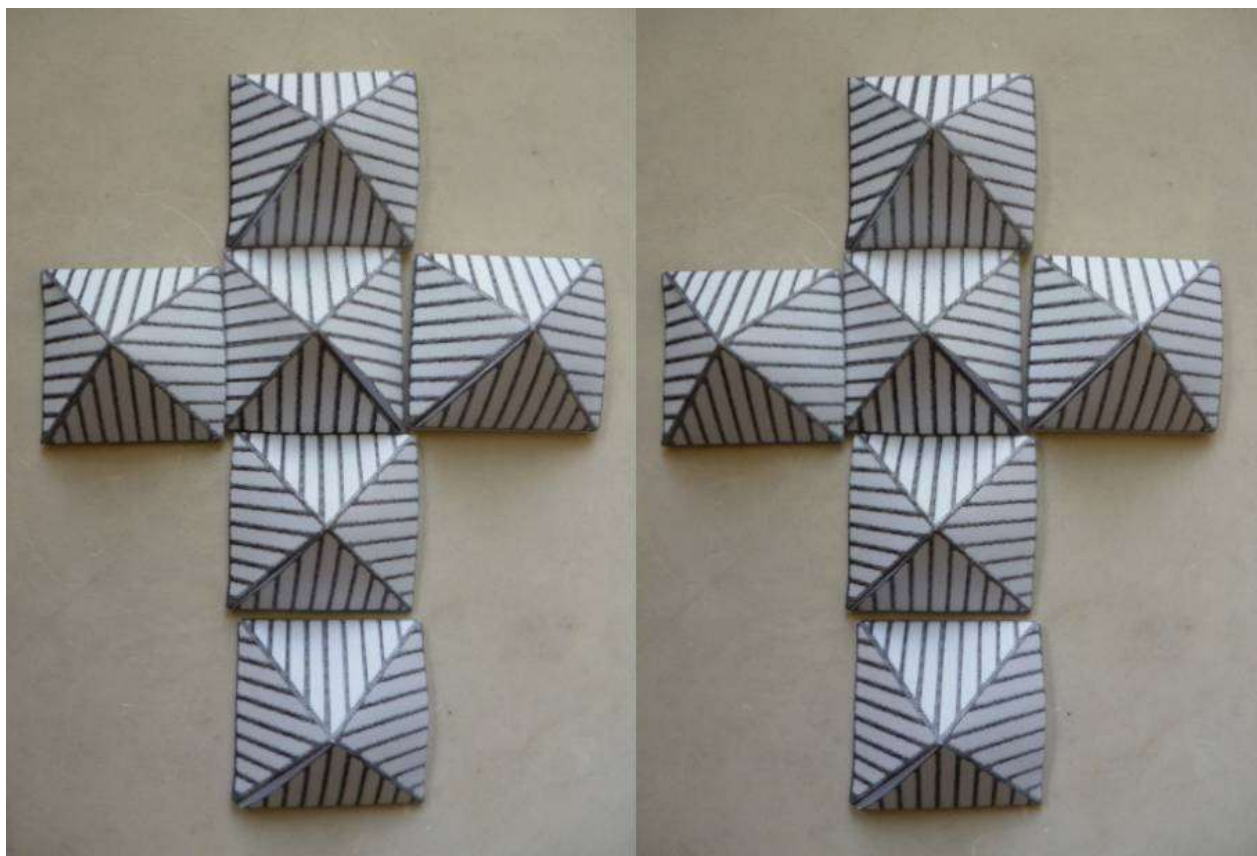
X

X-Tryptyk Cavalieri z przodu i z tyłu

Również sześć ostrosłupów prawidłowych czworokątnych wypełnia sześcian. Wierzchołki tych ostrosłupów spotykają się w jednym punkcie, który jest środkiem symetrii sześcianu.



Na zdjęciach stereo pokazane jest jak można praktycznie niemal dotykać geometrii przestrzennej. Z wyciętych siatek składamy modele brył bez kleju a z nich inne bryły. Tu z sześciu piramidek jeden sześcian. To naprawdę świetna nauka poprzez rozumowanie, działanie, a także stosowanie metody prób i błędów, bowiem zaprojektowane siatki zawsze trzeba sprawdzić doświadczalnie, czy dobrze się trzymają bez kleju.





II



II



II

Dlaczego warto zająć się tematem brył bez kleju?

Tworzenie takich siatek w komputerze rozwija wyobraźnię przestrzenną, pozwala praktycznie korzystać z własności figur płaskich i przestrzennych, przygotowuje do świadomego uczestniczenia w świecie, w którym modele matematyczne odgrywają kluczową rolę, nadaje się na prowadzenie zajęć metodą projektu na każdym etapie nauczania, następuje korelacja między przedmiotami: matematyką, informatyką, techniką. Dodatkowo materiał potrzebny do wykonania siatek czyli kolorowy papier ksero jest dostępny i tani.

Odwzorowując istniejące już siatki brył zastanawiamy się czy można je w jakiś sposób udoskonalić, tworzymy strategię najlepszego rozwiązania problemu. Jednak tworząc własne siatki może się zdarzyć, że popełnimy błąd, który najłatwiej skorygować poprzez wydrukowanie, wycięcie i złożenie bryły. Dotykamy wówczas geometrycznego problemu palcami, wykorzystujemy więcej zmysłów do nauki matematyki. Możemy tworzyć rozkłady różnych brył platońskich, możemy tworzyć siatki różnych brył między innymi graniastosłupów pochyłych, których modele nie są dostępne w sklepach z pomocami dydaktycznymi.

Zachęcam wszystkich nauczycieli matematyki, aby zainteresowali się tym tematem i spróbowali własnych sił w pracy dydaktycznej z dziećmi i młodzieżą.

Małgorzata Lesisz
Przewodnicząca Żoliborskiego Oddziału SNM
Doradca metodyczny m. st. Warszawa