

XXII Krajowa Konferencja SNM

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Elżbieta Ostaficzuk

Grażyna Śleszyńska; g.sleszynska@gmail.com

Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli

Ocenianie orientujące drogowskazem do matematycznego samokształcenia

Streszczenie:

1. Skuteczne nauczanie, czyli jak nauczyć ucznia uczenia się matematyki.
2. Istota oceniania orientującego – wskazywanie uczniowi indywidualnego kierunku i tempa poruszania się w krainie matematyki.
3. Indywidualne programy rozwoju umiejętności matematycznych – przykłady komentarzy dydaktycznych aktywizujących techniki myślenia w pogłębieniu i poszerzeniu umiejętności matematycznych.

1. Czy uczniowie lubią szkołę?

Jeśli pyta się dzieci i młodzież, dlaczego lubią chodzić do szkoły, wówczas od lat dają te same odpowiedzi w tej samej kolejności: po pierwsze – ponieważ spotykają tam przyjaciół; po drugie – ponieważ lubią nauczycieli; po trzecie – ponieważ tam się czegoś uczą.

(...) Korzystne przesłanki i warunki do tego zyskują dzięki klimatowi stosunków pełnych respektu i wzajemnej pozytywnej oceny; dzięki kulturze dialogu, sensownym ustaleniom i współpracy, dzięki wspieraniu indywidualnego rozwoju w kontekście planów uczenia się otwartych na uczniów...

A jeśli pyta się uczniów, dlaczego nie lubią chodzić do szkoły, to od lat padają następujące odpowiedzi: „ponieważ nauczyciele znieważają nas i zostawiają nas samych sobie oraz ponieważ lekcje są tak nudne”¹.

Uczniowie potrzebują takiego kierownictwa szkolnego (...), które stwarza przyjemny klimat i warunki zachęcające do rozwoju, które zwraca szczególną uwagę na procesy nauczania i uczenia się i które kieruje do uczniów odpowiednie wyzwania z pozytywnym umotywowaniem².

2. Nauczanie matematyki – czy może inspirować rozwój?

W okresie przemian życia społeczno-ekonomicznego w Polsce konieczne jest nauczanie, w tym także matematyki, odmienne od tradycyjnego. Jeśli nadal nauczyciel matematyki będzie ograniczał się do podawania uczniom gotowych wzorców postępowania, a praca uczniów będzie głównie sprowadzała się do rozwiązywania określonej liczby zadań „na

¹ Reinhold Miller, 2012, *Jak przeżyć w szkole. Poradnik dla nauczycieli i wychowawców*. Wyd. WAM, Kraków, s. 21 i nast.

² *Ibidem*, s.22.

zastosowanie twierdzenia Pitagorasa”, „na ciągi”, „na logarytmy” itp., to uczniowie w większym stopniu będą ćwiczyli pamięć aniżeli myślenie, zwłaszcza twórcze. Stwierdzenie to nabiera szczególnego znaczenia w aspekcie potrzeb i oczekiwań społeczeństwa wobec absolwenta szkoły. Funkcjonowanie we współczesnym świecie, praca zawodowa, wymagają od jednostki umiejętności radzenia sobie w różnych niespodziewanych sytuacjach, związanych nie tyle z wyćwiczonymi, zapamiętanymi zachowaniami, ile z otwartością, kreatywnością, nonkonformizmem³.

...ciągle pojawiają się głosy (zarówno ludzi nauki, jak i praktyków), że nadal na większości lekcji matematyki podstawową czynnością uczniów jest mechaniczne powtarzanie schematów. Zdaniem K. Dałek [„Jakiej matematyki uczymy?” Nauczyciele i Matematyka, 1994, nr 9]: „na typowej lekcji, gdy uczniowie mają <<wspólnie>> rozwiązać jakieś zadanie, nauczyciel najpierw starannie tłumaczy, o co chodzi w zadaniu, następnie podpowiada drogę rozwiązania – oczywiście najlepszą drogę, czyli swoją... Uczeń dostaje gotowy przepis i jedyną pracę, którą tak naprawdę ma szansę sam wykonać, są obliczenia”. Rozwiązywanie zadań matematycznych koncentruje się bardziej na poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie: „Ile ci wyszło?”, niż na pytaniach: „Jak do tego doszedłeś?”, „Czy można inaczej?”⁴.

Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań⁵.

Metodą stymulującą proces tworzenia, stosowaną w polskim kształceniu, jest nauczanie problemowe. (...) myślenie twórcze zawiera się w ogólnym modelu rozwiązywania problemów, mówiąc ściślej, jest rozwiązywaniem problemów typu „wynaleźć”, „skonstruować”⁶.

Przy rozwiązywaniu problemów (zadań) położony jest duży nacisk na to, aby uczeń widział i dobrze rozumiał „montaż logiczny” występujący w rozwiązywaniu problemów⁷.

3. Czy poprzez ocenianie kierujemy do uczniów pozytywnie umotywowane wyzwania?

Każdy uczeń jest oceniany na co dzień, w trakcie całego roku szkolnego przez swoich nauczycieli. Właściwie stosowana bieżąca ocena uzyskiwanych postępów pomaga uczniowi się uczyć, gdyż jest formą informacji zwrotnej przekazywanej mu przez nauczyciela. Powinna ona informować ucznia o tym, co zrobił dobrze, co i w jaki sposób powinien jeszcze poprawić oraz jak ma dalej pracować. Taka informacja zwrotna daje uczniom możliwość racjonalnego

³ Anna Malenda, 2001, *O twórcze nauczanie-uczenie się matematyki*. Wyd. PODKOWA BIS. Gdańsk, s. 33.

⁴ *Ibidem*, s. 32-33.

⁵ Zofia Krygowska, 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 3. Warszawa, s. 3.

⁶ Anna Malenda, *op. cit.* s. 13.

⁷ Robert Hajłasz, 2004, *Metodyka nauczania matematyki*. Wyd. Polskie Centrum Edukacji, Warszawa, s. 5.

kształtowania własnej strategii uczenia się, a zatem także poczucie odpowiedzialności za swoje osiągnięcia⁸.



<http://www.czasopisma.gwo.pl>

Matematyka w szkole Nr 69

4. Ocenianie zorientowane na rozwój.

Pracując w Mazowieckim Samorządowym Centrum Doskonalenia Nauczycieli nad projektem edukacyjnym **Półowa drogi...** szukaliśmy takiego sposobu oceniania wiedzy i umiejętności uczniów, który dawałby im nie tylko suchą informację: dostatecznie, dobrze, bardzo dobrze, niedostatecznie, ale raczej pomógł zrozumieć: „czego nie umiem”, „dlaczego nie dałem rady rozwiązać zadania”, „czego powinienem się nauczyć” – stąd koncepcja budowania dla ucznia komentarzy dydaktycznych, które wskazywałyby mu kierunek indywidualnego rozwoju. Autorskie komentarze formułowane przez nauczyciela to drogowskazy wskazujące drogę do sukcesu, tym skuteczniejsze, im lepiej nauczyciel zna swego ucznia.

Przykłady komentarzy dydaktycznych, opracowane do wybranych zadań projektu diagnostycznego **Półowa drogi...** realizowanego w mazowieckich szkołach ponadgimnazjalnych, podano w tab. 1.

⁸ Zbigniew Marciniak, 2009, *O potrzebie reformy programowej kształcenia ogólnego. Komentarz do podstawy programowej*. T. 6, s. 9.

Tabela 1. Komentarze dydaktyczne – przykłady

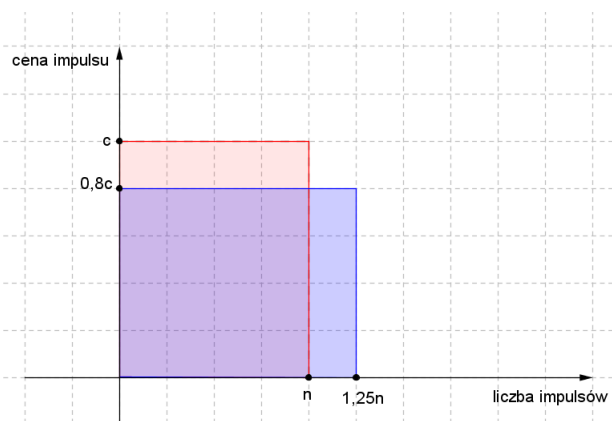
Zadanie 1.	Umiejętności ucznia:
W maju 2012 r. Zbyszek wykorzystał n impulsów telefonicznych, każdy w cenie c zł. Natomiast w czerwcu częściej rozmawiał przez telefon i zwiększył liczbę wykorzystanych impulsów telefonicznych o 25%. Okazało się jednak, że operator telefoniczny z okazji EURO 2012 obniżył cenę impulsów telefonicznych o 20%. Jak zmieniła się opłata telefoniczna Zbyszka za czerwiec, w porównaniu z opłatą za maj 2012 r. Zapisz swój tok rozumowania i odpowiedź.	- Opis opłaty majowej i jednej z modyfikacji rachunku telefonicznego: przez operatora lub przez użytkownika - Opis czerwcowego rachunku telefonicznego (z dwiema modyfikacjami) - Porównanie rachunku po dwóch modyfikacjach (z majowym) i sformułowanie odpowiedzi

Wymaganie ogólne	Komentarze dydaktyczne:
Wykorzystanie informacji	- Pojęcie procentu - Pojęcie punktu procentowego
Wykorzystywanie reprezentacji	- Obniżka/podwyżka (porównywanie różnicowe) - Zmniejszanie/powiększanie o ...% - Działania na procentach - Działania na ułamkach
Modelowanie	1. Porównanie rachunku majowego z czerwcowym ➤ Opłata majowa nc ➤ Opłata czerwcową: modyfikacja Zbyszka – $1,25n$ modyfikacja operatora – $0,8c$ Opłata czerwcową: $\frac{5n}{4} \cdot \frac{4c}{5} = nc$ <u>WNIOSEK</u>: opłata w czerwcu nie zmieniła się. 2. Porównanie rachunku majowego z czerwcowym – inny zapis ➤ Opłata majowa – nc ➤ Zmiana operatora – $(4c)/5$ ➤ Zmiana użytkownika – $(5n)/4$ ➤ Opłata czerwcową – $(4c)/5 \cdot (5n)/4 = nc$, <u>WNIOSEK</u>: opłata w czerwcu nie zmieniła się. 3. Porównanie liczby impulsów wykonanych w maju i czerwcu ➤ Początkowa cena impulsu – c ➤ Początkowa liczba impulsów – n ➤ Początkowa opłata telefoniczna – cn ➤ Liczba impulsów wykorzystanych przez Zbyszka po obniżce – $1,25n$ ➤ Cena impulsu po obniżce operatora – $0,8c$ ➤ Liczba możliwych impulsów po obniżce operatora – $\frac{cn}{0,8c} = \frac{n}{0,8} = \frac{5}{4}n = 1,25n$ <u>WNIOSEK</u>: Zbyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej

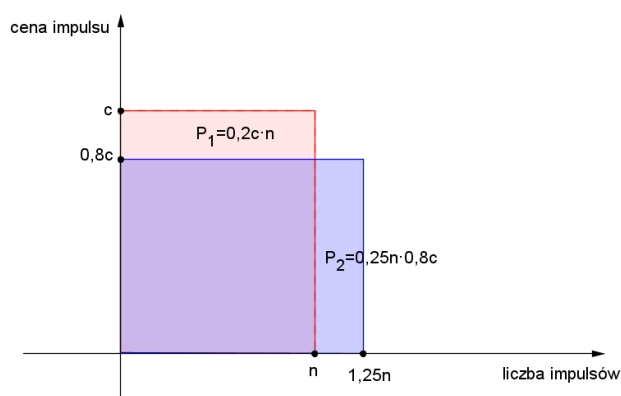
4. W tabeli:

	maj	czerwiec
Cena impulsu	c	$0,8c$
Liczba impulsów	n	$1,25n$
Koszt rozmów	cn	$0,8c \cdot 1,25n = \frac{4}{5}c \cdot \frac{5}{4}n = cn$

WNIOSEK: Zbyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej

5. Graficznie

Pole prostokąta „różowego” to koszt połączeń w maju, natomiast pole prostokąta „niebieskiego”, to koszt połączeń w czerwcu. Wystarczy zatem pokazać zależność między polami prostokątów „jednokolorowych”.



$$P_1 = 0,2cn \quad \text{oraz} \quad P_2 = \frac{1}{4}n \cdot \frac{4}{5}c = \frac{1}{5}cn = 0,2cn$$

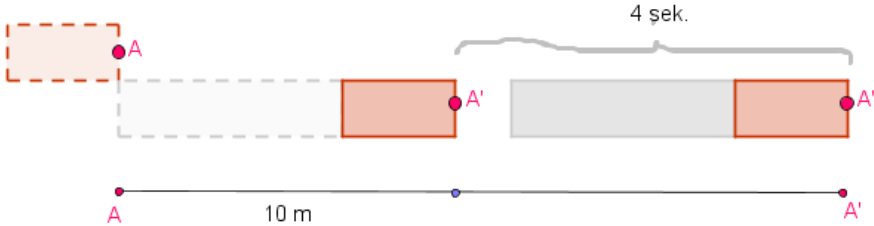
WNIOSEK: Zbyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej

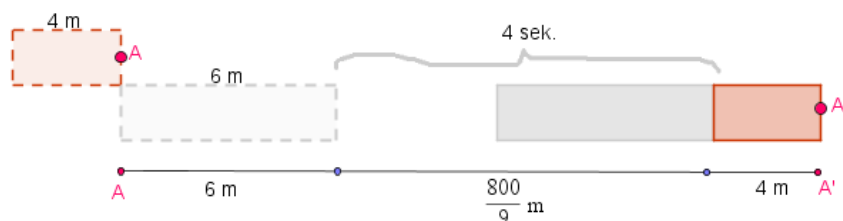
6. Uzasadnienie wynikające z analizy warunków zadania:

- ✓ Zbyszek w maju wykonał n impulsów
- ✓ **W maju zapłacił cn [zł]**
- ✓ W czerwcu wykonał $\frac{5}{4}n$ impulsów

	✓ W czerwcu zapłaciłby $\frac{5}{4}nc$ [zł] ✓ Operator obniżył cenę impulsu o $0,2c$ [zł] ✓ W czerwcu jeden impuls kosztuje $0,8c$ [zł] ✓ W takim razie Zbyszek w czerwcu zapłaci $0,8 \cdot \frac{5}{4}nc = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}nc = nc$ [zł] <u>WNIOSEK</u>: Zbyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej
--	---

Zadanie 2.	Umiejętności ucznia:
Pan Karol, jadąc 10 czerwca do Gdańska swoim samochodem osobowym o długości 4 m na mecz Hiszpania-Włochy, wyprzedzał furgonetkę o długości 6 m, poruszając się z prędkością 80 km/h. Z jaką prędkością Karol musiał wyprzedzać furgonetkę, żeby manewr ten był wykonany w czasie nie dłuższym niż 4 sekundy?	• Analiza treści – ustalenie długości i max. czasu wyprzedzania • Ustalenie o ile szybciej musi jechać samochód osobowy • Obliczenie różnicy szybkości • Obliczenie min. prędkości z jaką musi wyprzedzać samochód osobowy

Wymaganie ogólne PP	Komentarze dydaktyczne:
Wykorzystanie informacji	• Pojęcia: prędkość, droga, czas • Jednostki prędkości
Wykorzystywanie reprezentacji	• Zamiana jednostek • Przekształcanie wzorów
Modelowanie	1. Ustalenie czasu wyprzedzania i min. prędkości wyprzedzania  10 m $S = 4 + 6 = 10[m] \quad t \leq 4[s] \quad v_1 \geq \frac{10}{4}[m/s]$ $v_{\text{osob}} \geq 80[km/h] + v_1,$ $v_1 = \frac{10[m]}{4[s]} = \frac{1}{100} : \frac{4}{3600}[km/h] = \frac{1}{100} \cdot \frac{3600}{4} = 9[km/h]$ $v_{\text{osob}} \geq 89[km/h]$ Odp. Pan Karol musi jechać z prędkością co najmniej 89 km/h 2. Obliczenie drogi wyprzedzania i min. prędkości wyprzedzania



$$V_c = 80 \left[\frac{km}{h} \right] = \frac{80[km]}{3600[sek]} = \frac{200}{9} \left[\frac{m}{sek} \right]$$

$$t_c = 4[sek]$$

W czasie 4 sek. samochód ciężarowy pokona drogę $s_c = \frac{200}{9} \cdot 4 = \frac{800}{9} [m]$

Samochód osobowy oprócz drogi s_c musi pokonać jeszcze drogę 10 km (suma długości obu samochodów), czyli

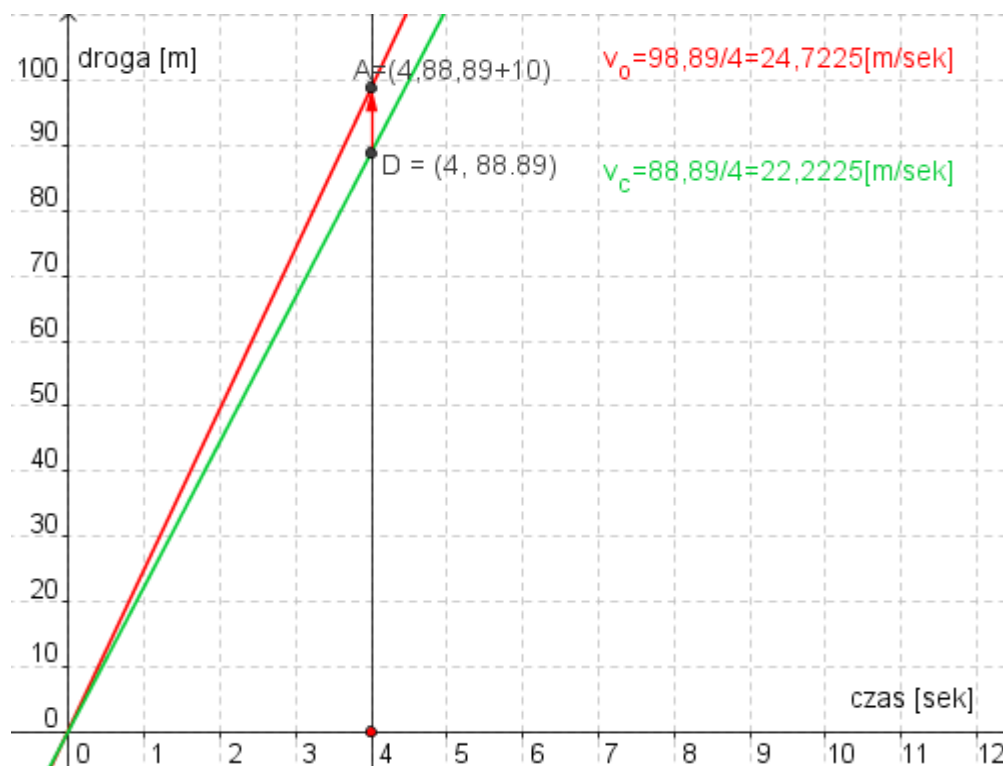
$$s_{osob} = \frac{800}{9} + 10 = \frac{890}{9} [m]$$

Zatem, skoro wyprzedzanie ma trwać nie dłużej niż 4 sek, to:

$$V_{osob} \geq \frac{s_o}{4[sek]} = \frac{890}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{890}{36} \left[\frac{m}{sek} \right] = \frac{89000}{3600} \left[\frac{m}{sek} \right] = \frac{89}{1} \left[\frac{km}{h} \right]$$

Odp. Pan Karol musi jechać z prędkością co najmniej 89 km/h

3. Metoda graficzna



Wykres zielony – wykres drogi samochodu ciężarowego w zależności od czasu:

	$v_c = 80 \left[\frac{km}{h} \right] = \frac{200}{9} \left[\frac{m}{sek} \right]$ $s_c = y_c = \frac{220}{9} \cdot x = 22,2225 \cdot x$ Po 4 sek samochód ciężarowy pokona drogę 88,89[m] (punkt D=(4;88,89)) Wykres czerwony – wykres drogi samochodu osobowego w zależności od czasu – wykres musi przechodzić przez punkt (0,0) oraz przez punkt A=(4;88,89+10) (samochód pokonuje dodatkowo drogę równą sumie długości obu samochodów) $v_o = \frac{98,89}{4} \left[\frac{m}{sek} \right] = \frac{98,89}{1000} \cdot \frac{3600}{4} [km/h] = 89 [km/h]$ Odp. Pan Karol musi jechać z prędkością co najmniej 89 km/h
--	---

Zadanie 3.	Umiejętności ucznia:
Rodzice – zaprzyjaźnieni od czasów gdy ich dzieci uczęszczały do tego samego przedszkola – wybrali się ze swymi dziećmi do kina, aby na dużym ekranie oglądać transmisję meczu Polska-Grecja inaugurującego fazę grupową Mistrzostw EURO 2012. Bilet dla osoby dorosłej kosztował 5 zł, a dla dziecka był o 40% tańszy. Za wszystkie bilety zapłacono 45 zł. Ilu w tej grupie mogło być rodziców, a ile dzieci?	• Założenie, że liczby rodziców i dzieci są naturalne, $r \geq 2$ („rodzice” w treści zad. występują w liczbie mnogiej, więc jest ich co najmniej dwoje) oraz $d \geq r/2$ (każde dziecko ma nie więcej niż dwoje rodziców) • Zapis zależności na sumę wydatków na bilety • Modelowanie, np. przez podstawianie kolejnych liczb naturalnych od $r=2$ i wyznaczanie możliwej liczby dzieci (spełniającej założenia) • Wyznaczenie jednej grupy rodziców i odpowiadającej im liczby dzieci • Wyznaczenie dwóch możliwych grup rodziców i dzieci

Wymaganie ogólne PP	Komentarze dydaktyczne:
Wykorzystanie informacji	Pojęcia: • Procent • Założenie – dziedzin
Wykorzystywanie reprezentacji	• Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi • Rozwiązanie równania z dwiema niewiadomymi
Modelowanie; użycie i tworzenie strategii	1. Ustalenie pary liczb naturalnych spełniających warunki zadania: Liczba rodziców – r Liczba dzieci – d Cena biletu rodzica – 5 zł Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł Łączny koszt biletów – 45 zł $45 = 5r + 3d$

$$r \geq 2, d \geq 1$$

$$45 = 5 \cdot 2 + 35 = \underline{5 \cdot 3 + 3 \cdot 10} = 5 \cdot 4 + 25 = 5 \cdot 5 + 20 = \underline{5 \cdot 6 + 3 \cdot 5} = 5 \cdot 7 + 10 = 5 \cdot 8 + 5$$

Warunki zadania spełniają tylko:

→ Grupa I = 3 rodz. + 10 dzieci

→ Grupa II = 6 rodz. + 5 dzieci

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

2. Ustalenie pary liczb naturalnych spełniających warunki zadania – analiza w tabeli:

Liczba rodziców – r

Liczba dzieci – d

Cena biletu rodzica – 5 zł

Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł

Łączny koszt biletów – 45 zł

$$45 = r \cdot 5 + d \cdot 3$$

Dyskusja liczby rozwiązań	l. rodz. $r \geq 2$	l. dzieci $d \geq 1$	Możliwe rozwiązania
$45 = 2 \cdot 5 + 35$	2	-	
$45 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 10$	3	10	+
$45 = 4 \cdot 5 + 25$	4	-	
$45 = 5 \cdot 5 + 20$	5	-	
$45 = 6 \cdot 5 + 5 \cdot 3$	6	5	+
$45 = 7 \cdot 5 + 10$	7	-	
$45 = 8 \cdot 5 + 5$	8	-	

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

3. Rozwiązanie graficzne:

Liczba rodziców – x

Liczba dzieci – y

Cena biletu rodzica – 5 zł

Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł

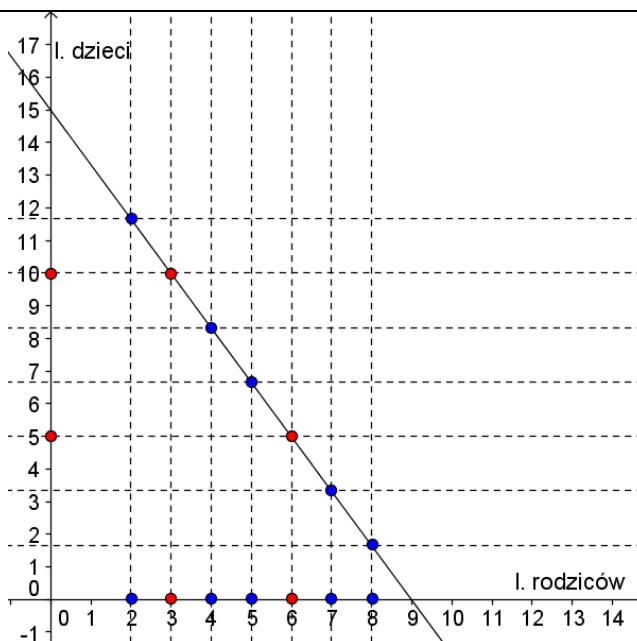
Łączny koszt biletów – 45 zł

$$45 = 5x + 3y$$

Narysujmy prostą $y = -\frac{5}{3}x + 15$

Szukamy tylko takich punktów leżących na prostej $y = -\frac{5}{3}x + 15$, których obie

współrzędne są liczbami naturalnymi, oraz $x \geq 2, y \geq 1$



Sprawdzenie:

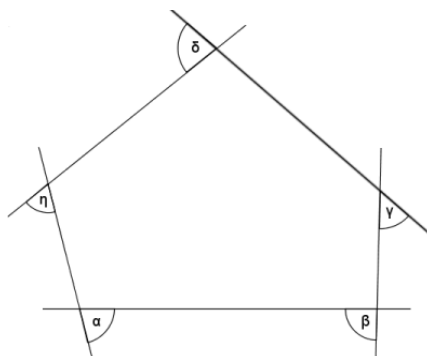
$$45 = 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3$$

$$45 = 6 \cdot 5 + 5 \cdot 3$$

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

Zadanie 4.

Na murawę stadionu w Charkowie piłkarze wbiegają przez bramę o przekroju przedstawionym na rysunku.

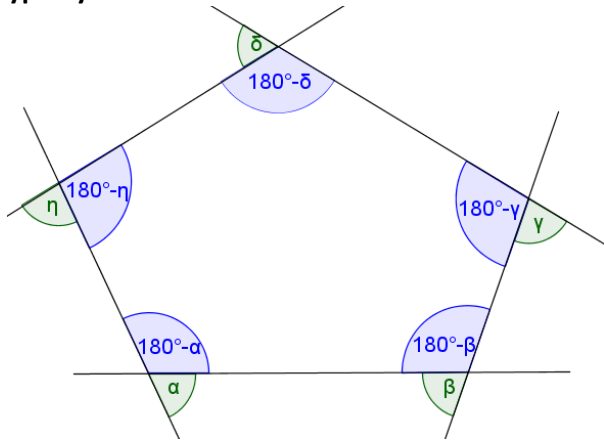
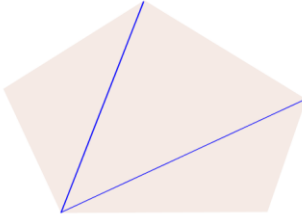
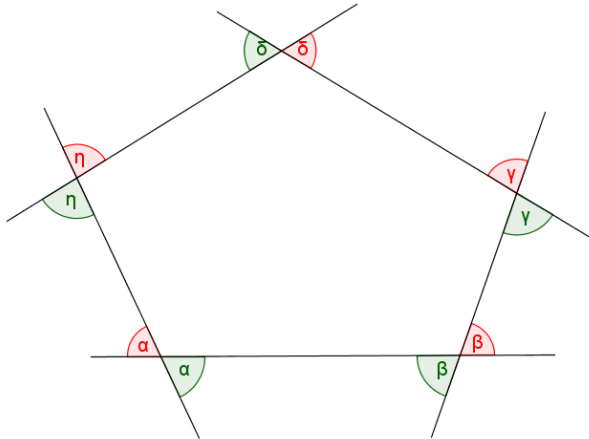


Wykaż, że suma kątów $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ wynosi 360° .

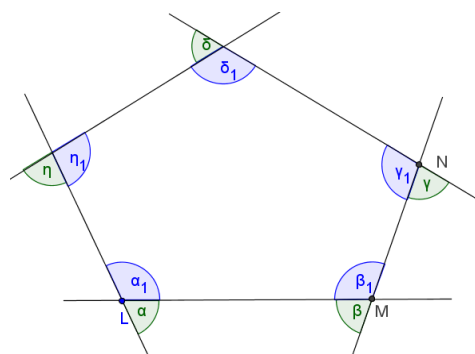
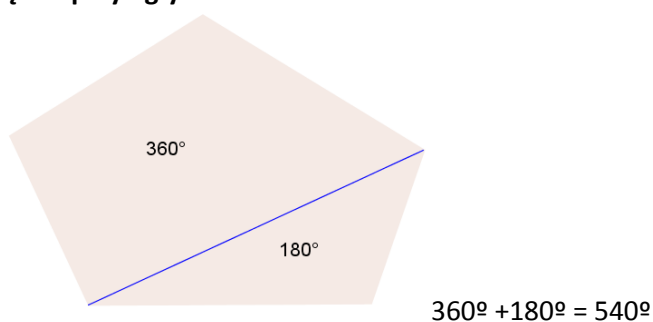
Umiejętności ucznia:

- Zastosowanie jednej z własności: o sumie kątów wewnętrznych pięciokąta wypukłego lub o sumie kątów przyległych
- Zastosowanie obu własności: o kątach w pięciokącie i o kątach przyległych
- Zapisanie zależności: suma z sum kątów przyległych i zauważenie w niej sumy kątów wewnętrznych pięciokąta
- Wyznaczenie szukanej sumy kątów

Wymaganie ogólne	Komentarze dydaktyczne:
Wykorzystanie informacji	• Kąt wewnętrzny wielokąta • Kąt zewnętrzny wielokąta • Kąty przyległe • Kąty wierzchołkowe
Wykorzystywanie	• Suma kątów wewnętrznych trójkąta

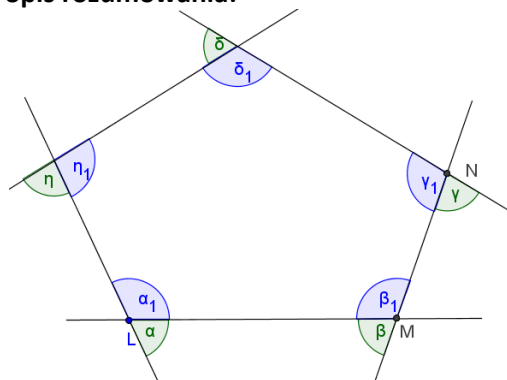
reprezentacji	• Suma kątów wewnętrznych czworokąta, wielokąta • Własności kątów przyległych • Własności kątów wierzchołkowych
Modelowanie	1. Zastosowanie własności kątów przyległych oraz sumy kątów wewnętrznych w pięciokącie wypukłym  $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \delta) + (180^\circ - \eta) = 540^\circ$ $5 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta) = 540^\circ$ $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta = 360^\circ$ 2. Zastosowanie własności kątów wierzchołkowych oraz sumy kątów wewnętrznych w trójkącie  Suma kątów wewnętrznych pięciokąta: $(n - 2) \cdot 180^\circ = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$  Z własności kątów wierzchołkowych: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta = \frac{5 \cdot 360^\circ - 2 \cdot 540^\circ}{2} = \frac{1800^\circ - 1080^\circ}{2} = \frac{720^\circ}{2} = 360^\circ$

3. Zastosowanie własności sumy kątów wewnętrznych czworokąta i trójkąta oraz własności kątów przyległych:



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta = 5 \cdot 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + \eta_1) = 900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$$

4. Szczegółowy opis rozumowania:



Z własności kątów wierzchołkowych:

$$2\alpha + 2\alpha_1 + 2\beta + 2\beta_1 + 2\gamma + 2\gamma_1 + 2\delta + 2\delta_1 + 2\eta + 2\eta_1 = 5 \cdot 360^\circ / : 2$$

$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 + \delta + \delta_1 + \eta + \eta_1 = 5 \cdot 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + \eta_1 = 5 \cdot 180^\circ$$

Z własności pięciokąta:

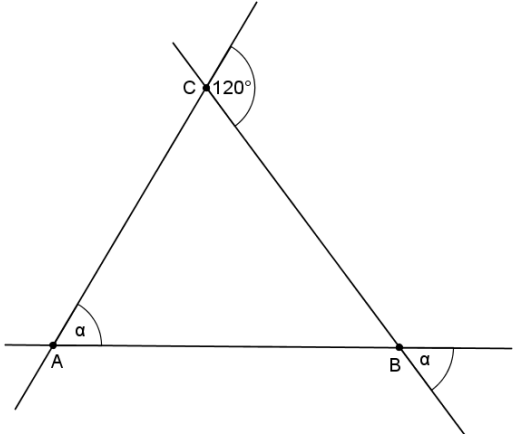
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + \eta_1 = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + \eta_1 = 5 \cdot 180^\circ$$

Zatem:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta + 3 \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta = 5 \cdot 180^\circ - 3 \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

Rozumowanie i argumentacja	Rozwiązanie podobnych zadań, np. <i>Uzasadnij, że trójkąt ABC ma wszystkie boki równej długości</i> (patrz rysunek) 
--	---

5. Odkrywamy matematykę

Matematyka jest zarówno starożytna, jak i nowoczesna...⁹ Po Indiach i świecie arabskim odziedziczyliśmy współczesny system liczbowy, noszący ślady różnorodnych wpływów historycznych. Babiloński system z podstawą równą 60 sprzed dwóch czy trzech tysiącleci przed naszą erą ujawnia się w naszej kulturze – mamy 60 sekund w minucie, 60 minut w godzinie, kąt prosty ma nadal 90 stopni, a nie 100, jak niegdyś postanowiła rewolucyjna Francja w pierwszym kroku do „decymalizacji”.

(...) Matematyka jest dostępna dla wszystkich. Popularność gry liczbowej sudoku jest dowodem na to, że ludzie mogą uprawiać matematykę (nawet o tym nie wiedząc) i jeszcze się przy tym doskonale bawić.

Matematyka jest niezbędnym narzędziem¹⁰ potrzebnym do korzystania z ogromnej części dorobku cywilizacyjnego.

Oryginalne pomysły, metody rozwiązywania problemów, rozumowanie – to atrybuty, zarówno nauczyciela, jak i ucznia. Może, zamiast nudnych (w rozumieniu niektórych uczniów) zadań matematycznych bardziej interesująca byłaby nauka obliczania, przewidywania, szacowania, opracowywania strategii gdybyśmy na lekcjach matematyki wykorzystali to, czym wielu naszych uczniów pasjonuje się na co dzień:

Gra DART¹¹

Od 5 do 13 stycznia 2013 roku odbywały się w Londynie Mistrzostwa Świata w grze DART. Gra DART jest zarówno profesjonalnym sportem, jak również tradycyjną rozrywką, popularną głównie w krajach anglojęzycznych i skandynawskich. Polega na rzucaniu

⁹ Tony Crilly, 2009, *50 teorii matematyki, które powinieneś znać*. Wyd. Nauk. PWN, s. 4-5.

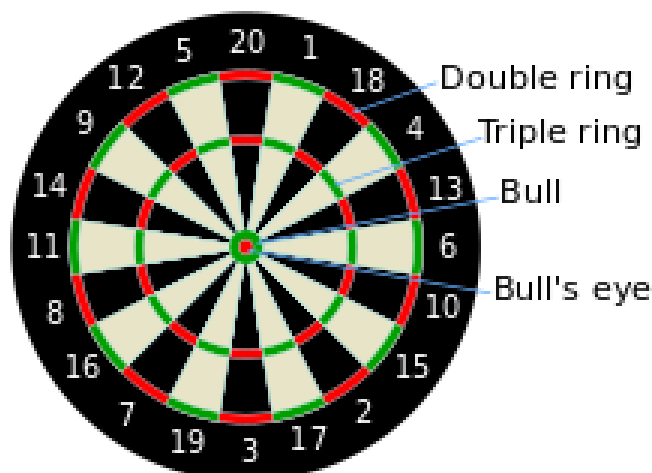
¹⁰ *Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka*, s. 75 (w:) T. 6. *Edukacja matematyczna i techniczna. Podstawa programowa z komentarzami*. MEN, 2009.

¹¹ Na podstawie materiałów źródłowych: relacje na żywo w dniach 5-13 stycznia 2013 w telewizji eurosport oraz: <http://wikipedia.org/wiki/Dart>; <http://www.bdodarts.com>

niewielkimi lotkami w tarczę zawieszoną na ścianie. Obowiązuje standardowa tarcza, przedstawiona na rys. 1., i ustalone zasady gry.

Rysunek 1. Standardowa tablica do gry w DARTA

Źródło: <http://pl.wikipedia.org/wiki/Dart>



Na okrągłej tablicy znajdują się trójkątne pola wychodzące ze środka tarczy. Najwyżej punktowane pole (20 punktów) znajduje się w części górnej. Trójkątne pola oraz koncentryczne obręcze dzielą tarczę na obszary punktowane pojedynczo, podwójnie oraz potrójnie.

Obowiązują następujące zasady punktacji:

- Trafienie dużego pola w kolorze białym lub czarnym jest punktowane zgodnie z numeracją pola.
- Trafienie w zewnętrzną obręcz (w kolorze czerwonym albo zielonym) jest punktowane zgodnie z podwojoną numeracją pola.
- Trafienie w wewnętrzną obręcz (w kolorze czerwonym albo zielonym) jest punktowane zgodnie z potrojoną numeracją pola.
- Trafienie w środek tarczy, w zewnętrzny pierścień (w kolorze zielonym) daje 25 punktów.
- Trafienie w centralne koło na tarczy (w kolorze czerwonym) daje 50 punktów.
- Trafienie poza zewnętrzną obręcz, w pierścień opisany numerami pól, daje 0 punktów.
- Również 0 punktów uzyskuje się w przypadku, gdy rzutka nie jest trwale wbita w tablicę.

Gra w DARTA to pojedynek między dwoma zawodnikami. Pojedyncze rozgrywki – legi – polegają na wykonywaniu przez zawodników na przemian po trzy rzuty do tarczy. Wygrywa zawodnik, który pierwszy zredukuje przyznaną liczbę 501 punktów do 0. Jeżeli zawodnik trafi w pole, które da wynik ujemny, to kończy się kolejka jego rzutów i przywracany jest wynik stanu sprzed tej kolejki.

Zawodnicy celują w pola punktowane najwyżej, tzn. potrójnie, albo w środek tarczy. Najtrudniejszy jest ostatni rzut, bo trzeba uzyskać dokładnie potrzebną liczbę punktów. Początkujący albo bardzo zdenerwowani zawodnicy najczęściej rozpoczynają rozgrywkę od rzutów w lewą część tarczy, to znaczy celują w pole z numerem 14, gdyż w przypadku rzutu niecelnego można, trafiając w pobliskie pola, uzyskać niewiele mniej punktów.

6. A teraz sformułujmy zadania...

Zadanie A.

W finale Mistrzostw Świata 2013 w grze DART zawodnik zwyciężył w legu wykonując 9 celnych rzutów na pola punktowane potrójnie. Podaj wartości punktów, z zakresu od 501 do 0, które po każdym rzucie uzyskiwał ten zawodnik¹².

Zadanie B.

W eliminacjach Mistrzostw Świata 2013 w grze DART zawodniczka w pierwszym legu starała się rzucać w pole z numerem 14, nie zawsze celnie. Jednak w każdym rzucie trafiała w pole punktowane potrójnie. Wykonała w legu 13 rzutów. Podaj wartości punktów (niekoniecznie uporządkowane chronologicznie), które na koncie zawodniczki dokumentowały liczbę punktów z zakresu od 501 do 0¹³.

Czy takie zadania – problemy mogą zachęcić uczniów do uczenia się matematyki?

¹² Strategia rozwiązania zad. A: $501:3=167$ $167=8*20+1*7$ $8+1=9$

¹³ Strategia rozwiązania zad. B: $501:3=167$ $167=10*14+27=10*14+3*9$ $10+3=13$